Lois de probabilités

Ts

On a rencontré en classe de première la notion de variable aléatoire, on va dans ce chapitre systématiser la notion de loi de probabilité et répertorier des lois de probabilité classiques.

1 Lois de probabilités discrètes

1.1 Généralités et rappels

Définition : Soit Ω un univers de probabilité **fini**. Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer à chaque élément de Ω un (**unique**) nombre réel.

En fait, une variable aléatoire est une application $\mathrm{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On note parfois $\mathrm{X}(\Omega)$ l'ensemble des x_i, les images par X des éléments de Ω.

Exemple : On joue trois fois de suite à PILE ou FACE. L'univers est ici :

$$\Omega = \{FFF,\ FFP,\ FPF,\ PFF,\ FPP,\ PFP,\ PPF,\ PPP\}.$$

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois qu'on a obtenu PILE. Á chaque élément de Ω, on associe 0, 1, 2 ou 3 : à FFF on associe 0, à PPF on associe 2,...

Définition : Soit Ω un univers muni d'une probabilité p. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω pouvant prendre les valeurs $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$.

La loi de probabilité de X est la loi de probabilité est un tableau mettant en correspondance les valeurs x_i et $p(\mathrm{X} = x_i$ (probabilité que X prenne la valeur x_i).

On résume souvent ces informations dans un tableau du type suivant :

Valeurs de $\mathrm{X}(\Omega)$, x_i	x_1	...
$P(\mathrm{X} = x_i)$	$P(\mathrm{X} = x_1)$	...

Soit X une variable aléatoire, définie sur Ω et pouvant prendre les valeurs $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$.

Définition : • L'espérance de la variable X est notée E(X) et a pour valeur $\mathrm{E(X)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i p(\mathrm{X} = x_i)$.

• La variance de la variable X, notée V(X), a pour valeur $\mathrm{V(X)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{E(X)})^2 p(\mathrm{X} = x_i)$.

Théorème : $\mathrm{V(X)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(\mathrm{X} = x_i) - [\mathrm{E(X)}]^2$.

Égalité qui se note souvent : $\mathrm{V(X)} = \mathrm{E(X^2)} - [\mathrm{E(X)}]^2$

Démonstration : Par définition, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{V(X)} &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathrm{E(X)})^2 p(\mathrm{X} = x_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\mathrm{E(X)} + [\mathrm{E(X)}]^2\right)p(\mathrm{X} = x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 p(\mathrm{X} = x_i) - \sum_{i=1}^{n}2x_i\mathrm{E(X)}p(\mathrm{X} = x_i) + \sum_{i=1}^{n}[\mathrm{E(X)}]^2 p(\mathrm{X} = x_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V(X)} &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 p(\mathrm{X} = x_i) - 2\mathrm{E(X)}\sum_{i=1}^{n}x_i p(\mathrm{X} = x_i) + [\mathrm{E(X)}]^2\sum_{i=1}^{n}p(\mathrm{X} = x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 p(\mathrm{X} = x_i) - 2\mathrm{E(X)} \times \mathrm{E(X)} + [\mathrm{E(X)}]^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 p(\mathrm{X} = x_i) - [\mathrm{E(X)}]^2\end{aligned}$$

Définition : L'ecart type de la variable X est notée $\sigma(X)$ et a pour valeur $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$.

Exemple : Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X des exemples précédents.

1.2 Loi de Bernoulli

Définition : • Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve à deux issues : le succès noté S et un échec noté $\overline{S}$ de probabilités respectives p et $1 - p$.

• Le **loi de Bernoulli** est la variable aléatoire X telle que $\mathrm{X} = 1$ si le succès est réalisé, $\mathrm{X} = 0$ sinon. La probabilité p correspond à $p(\mathrm{X} = 1)$ et est appelé le paramètre de X.

La loi de probabilité d'une variable de Bernoulli X est :

k	0	1
$P(\mathrm{X} = k)$	$1 - p$	p

Propriété : Si X suit la variable de Bernoulli de paramètre p, alors $E(\mathrm{X}) = p$ et $V(\mathrm{X} = p(1 - p)$.

Démonstration :
• $E(\mathrm{X}) = 0 \times p(\mathrm{X} = 0) + 1 \times p(\mathrm{X} = 1) = 0 + 1 \times p = p$.
• $V(\mathrm{X}) = (0 - E(\mathrm{X}))^2 \times p(\mathrm{X} = 0) + (1 - E(\mathrm{X}))^2 \times p(\mathrm{X} = 1) = p^2 \times (1 - p) + (1 - p)^2 \times p$
$= p(1 - p)[p + (1 - p)] = p(1 - p)$. □

Exemple : un jeu de pile ou face (que la pièce soit équilibrée ou non) constitue une épreuve de Bernoulli. La désintégration ou non du noyau atomique d'un élément radioactif peut également être assimilé à une épreuve de Bernoulli.

Exercices : ? ? de l'*Hyperbole*.

1.3 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

En répétant **n fois** et **de façon indépendante** une épreuve de Bernoulli, on définit une schéma de Bernoulli.

Définition : Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où le succès S est réalisé au cours du schéma de Bernoulli. Alors X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Ce qu'on peut noter X$B(n\ ;\ p)$.

Théorème (Loi binomiale) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\ ;\ 1]$. X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$p(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\ ,\ E(\mathrm{X}) = np \text{ et } V(\mathrm{X} = np(1-p).$$

Notation : $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ se lit «probabilité de A sachant ». On note parfois cette probabilité $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$.

Démonstration :(à écrire)

$$\begin{aligned} p(\mathrm{A}) &= p(\mathrm{A} \cap \Omega) = p[\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \overline{\mathrm{B}}] \\ &= p[(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})]. \end{aligned}$$

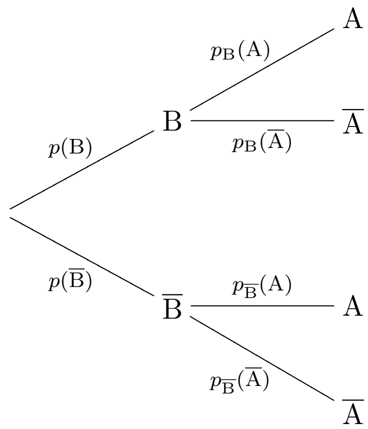
Or les événements $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$ sont incompatibles ; en effet :

$$(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \varnothing.$$

On a ainsi $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + p(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$ d'où (en vertu des formules des probabilités conditionnelles) :

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = p(\overline{\mathrm{B}}) \times P_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{A}). \quad \square$$

Ce résultat est souvent schématisé sous la forme d'un arbre de probabilités :



Exemple : pas le temps

Exercices : 19 à 23 p. 433 du manuel.