Dénombrement et probabilités

Ts

1 Combinaisons

1.1 Factorielle et combinaison

<u>Définition</u> : Soit n est un entier supérieur ou égal à 1. On appelle "factorielle n", l'entier noté $n!$, ayant pour valeur :

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemples : $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$ et $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Les machines savent calculer ces entiers. Á l'aide d'une calculatrice, calculer $9!$, $15!$ et $37!$.

<u>Définition</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble admettant n éléments. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$. On appelle **combinaison** de p éléments de E tout sous-ensemble de E admettant p éléments.

Le nombre de combinaison de p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ et se lit «p parmi n».

Remarque : une combinaison de p éléments de E revient à un choix simultané de p éléments parmi n, sans ordre et sans répétition possible.

<u>Théorème</u> : Pour tout couple d'entiers naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration :
• Si $p = 0$, la seule partie de E contenant 0 élément est $\varnothing$; il n'y en a donc une seule. De plus $\frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1 = \binom{n}{0}$. La formule est vraie pour $p = 0$.
• Si $1 \leqslant p \leqslant n$, on pose $\text{E} = \{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_{n-1},\ e_n\}$. On va commencer par dénombre l'ensemble des suites ordonnées de p éléments de E. Pour les obtenir, on peut construire un arbre (chaque ramification correspondant au choix du i-ème élément de la suite ordonnée de p éléments que l'on est en train de construire).

Il y a n choix possibles pour le premier élément, $(n-1)$ choix possibles pour le deuxième... et $(n-p+1)$ pour le p-ième. Il y a donc $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$ différentes suites ordonnées de p éléments de E.

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-p) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Or dans un sous-ensemble, on ne tient pas compte de l'ordre, contrairement au dénombrement effectué ci-dessus. On va donc regrouper les suites ordonnées de p éléments de E par paquets ; les éléments comme $(e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_p)$, $(e_2,\ e_1,\ \ldots,\ e_p)$, $(e_3,\ e_2,\ e_1,\ \ldots,\ e_p)$, etc. correspondent à la même combinaison de p éléments de E. Il y en a $p!$ (on pourrait refaire un arbre pour s'en convaincre). D'où $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. $\square$

Remarque : Pour tout entier naturel n, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ (si $n \geqslant 1$). Ce qui correspond à l'intuition (nombre de parties de 0, n, 1 et $n-1$ éléments de E respectivement).

Exemple : Á l'aide d'une calculatrice, calculer $\binom{12}{3}$, $\binom{16}{5}$ et $\binom{30}{15}$.

<u>**Propriétés**</u> :

1. Pour tout couple d'entiers naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, $\displaystyle\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.
2. Pour tout couple d'entiers naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $\displaystyle\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Démonstration : La première propriété découle du fait que $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ et de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Pour établir la seconde :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n! \times (p+1)}{(p+1)!(n-p)!} + \frac{n! \times (n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{n!}{(p+1)!(n-p)!}(p+1+n-p) \\
&= \frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} = \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

Exercices : 1 à 5 p. 431

<u>**Application**</u> : Triangle de Pascal En utilisant la propriété 2· et en disposant les coefficients $\binom{n}{p}$ en triangle, on obtient de proche en proche la valeur de ces coefficients :

$$\begin{tikzcd}
\binom{n}{p} \arrow[dr] & \oplus & \binom{n}{p+1} \arrow[dl] \\
 & \binom{n+1}{p+1} &
\end{tikzcd}$$

.

Le tableau obtenu s'appelle le **triangle de Pascal** et ses coefficients sont appelés les **coefficients du binôme** pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe suivant.

$n=0$				$\binom{0}{0}$								1				
$n=1$			$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$						1		1			
$n=2$		$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$		$\longleftrightarrow$		1		2		1		
$n=3$	$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$		1		3		3		1	

1.2 Formule du binôme de Newton

<u>**Théorème**</u> : Soit a et b deux nombres complexes. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$.

Démonstration : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

• **Initialisation** : la formule est vraie pour $n = 0$ ($(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = \binom{0}{0} a^0\, b^0 = 1$) et, de façon moins abstraite, pour $n = 1$:
$(a+b)^1 = a+b$ et $\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = \binom{1}{0} a^1\, b^0 + \binom{1}{1} a^0\, b^1 = a+b$).

• **Hérédité** : supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé arbitrairement et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n=1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\ b^k \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\ b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\ b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}\ b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\ b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}\ b^k + \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}a^{n-\ell+1}\ b^\ell \text{ en posant } \ell = k+1 \text{ dans la 2e somme} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}\ b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}\ b^k \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}\ b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}\ b^k + \binom{n}{n}a^0\ b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^{n-k+1}\ b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}\ b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{(n+1)-k}\ b^k
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$ et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Notation : avec des notations moins rigoureuses mais plus parlantes,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\ b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}\ b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1\ b^{n-1} + b^n.$$

Par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant le triangle de Pascal pour les coefficients binomiaux. $(1+x)^4 = 1^4 + \binom{4}{1}1^3x + \binom{4}{2}1^2x^2 + \binom{4}{3}1^1x^3 + x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.

Exercices : 15 à 17 p. 432, 18 p. 433 de l'*Hyperbole*.

2 Probabilités conditionnelles

On désigne par p une probabilité définie sur un univers Ω.

2.1 Définition et exemple

Exemple d'introduction : Un couple (hétérosexuel) a deux enfants, on admet qu'un enfant a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être un garçon. Calculer la probabilité le cadet soit un garçon. Calculer la probabilité que le cadet soit un garçon sachant que le couple a au moins une fille. (Faire des arbres !).

Ainsi, le fait de savoir un événement réalisé peut influer sur la probabilité d'un autre.

Soit A et B deux événements tels que $p(\mathrm{B}) \neq 0$.

Définition (Probabilité conditionnelle) : La **probabilité de A sachant que B est réalisé** est le réel noté $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ définie par

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}.$$

Notation : $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ se lit «probabilité de A sachant ». On note parfois cette probabilité $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$.

<u>**Conséquence immédiate**</u> : Soit A et B deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}).$$

<u>**Définition**</u> **(Partition)** : Les événements E_1, E_2,…, E_n forment une partition de l'univers Ω lorsqu'ils sont tous **non vides**, deux à deux disjoints et recouvrent Ω. Plus précisément :

- pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathrm{E}_i \neq \varnothing$;
- pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, $\mathrm{E}_i \cap \mathrm{E}_j = \varnothing$;
- $\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cup \ldots \mathrm{E}_n = \Omega$.

<u>**Théorème**</u> **(des probabilités totales)** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un univers et B_1, B_2,…, B_n une partition de Ω, alors pour tout événement A :

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}_1) + p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}_2) + \ldots + p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}_n),$$

Résultat que l'on trouve parfois sous la forme :

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}_1) \times P_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}_2) \times P_{\mathrm{B}_2}(\mathrm{A}) + \ldots + p(\mathrm{B}_n) \times P_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}).$$

On va en fait démontrer une version moins générale de ce théorème (version "restreinte" qui est souvent utile dans les problèmes) :

<u>**Corollaire**</u> : Soit A et B deux événements tels que $p(\mathrm{B}) \neq \varnothing$ et $p(\overline{\mathrm{B}}) \neq \varnothing$. Alors B et $\overline{\mathrm{B}}$ forment une partition de l'univers Ω et

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = p(\overline{\mathrm{B}}) \times p_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{A}).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}\cap\Omega) &= p[\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\overline{\mathrm{B}}] \\ &= p[(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})]. \end{aligned}$$

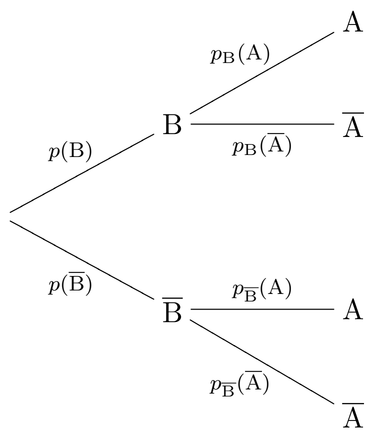
Or les événements $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ et $\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}$ sont incompatibles ; en effet :

$$(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \cap (\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{B}}) = \varnothing.$$

On a ainsi $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + p(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})$ d'où (en vertu des formules des probabilités conditionnelles) :

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = p(\overline{\mathrm{B}}) \times P_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{A}). \quad \square$$

Ce résultat est souvent schématisé sous la forme d'un arbre de probabilités :



Exemple : On considère une urne contenant 4 boules rouges et 5 boules noires indiscernables au toucher.

On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. Soit A l'événement : «la première boule tirée est rouge» et B l'événement «la deuxième boule tirée est noire».

Calculer $p(\mathrm{A})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$, puis en déduire $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

Exercices : 2 et 3 p. 401, 5 et 6 p. 402, 14, 18 et 19 p. 403 du manuel.

2.2 Événements indépendants

Définition : On dit que deux événements A et B sont **indépendants** dès que

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}).$$

Propriété : Si A et B sont deux événements indépendants de probabilité non nulle, alors

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}) \text{ et } p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B}).$$

On retiendra que lorsque deux événements sont indépendants, la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

Démonstration : la démonstration de ce résultat est immédiate. Par exemple : Si $p(\mathrm{B}) \neq 0$ alors d'après la formule des probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})} = \frac{p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$ par indépendance.

Le résultat cherché en découle après simplification par $p(\mathrm{B}) \neq 0$. □

Exemple : Avec un jeu de 32 cartes, soit les événements C=«tirer un cœur», V=«tirer un valet» et R=«tirer une carte rouge».

En dénombrant ces différents événement par "comptage", et sous hypothèse d'équiprobabilité, on calcule successivement que :

$$p(\mathrm{C}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad p(\mathrm{V}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p(\mathrm{C} \cap \mathrm{V}) = p(\mathrm{C}) \times p(\mathrm{V}) = \frac{1}{32};$$

$$p(\mathrm{R}) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, \quad p(\mathrm{C} \cap \mathrm{V}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad p(\mathrm{C}) \times p(\mathrm{R}) = \frac{1}{8}.$$

Dans le premier cas, on voit que les événements C et V sont indépendants (ceci provient du fait que les valets sont "équirépartis" dans les quatre couleurs.

Par contre, C et R ne sont pas incompatibles : on voit bien intuitivement que savoir qu'une carte rouge a été tirée va influer sur la proba de tirer un cœur.

Exercices : 7, 9 et 10 p. 403 du manuel

2.3 Variables aléatoires et indépendance

On se souvient de la définition d'une variable aléatoire sur un univers de probabilité Ω (pour se rafraîchir la mémoire, on pourra consulter les feuilles de cours de première que j'ai distribué au début du cours de proba). Pour aller vite, une variable aléatoire X est une **application**[1] de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'elle associe un nombre réel à toute issue de l'univers. On peut y penser comme à une *règle du jeu* proposé par l'expérience aléatoire concernée.

Définition : X et Y sont des variables aléatoires sur un univers Ω (de cardinal n).
Notons x_1, x_2, ...,x_n les valeurs prises par X et y_1, y_2, ...,y_n celles prises par Y.

On dit que X et Y sont **indépendantes** si et seulement si les événements «$\mathrm{X} = x_i$» et «$\mathrm{Y} = y_j$» sont indépendants pour tout couple d'entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, c'est-à-dire :

$$p(\mathrm{X} = x_i \text{ et } \mathrm{Y} = y_j) = p(\mathrm{X} = x_i) \times p(\mathrm{Y} = y_i).$$

[1]Une application est fonction définie sur son ensemble de départ tout entier. Sur Ω tout entier dans notre cas.

Exemple : L'épreuve aléatoire consiste en deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré. Soit X et Y les variables aléatoires donnant respectivement le numéro de la face supérieure lors du premier et du second lancer.

Si on ne triche pas, et que les deux lancers sont véritablement aléatoires et indépendants, la probabilité d'un événement élémentaire de l'univers de probabilité associé cette épreuve est, par exemple :

$$p(\{(6\ ;\ 6)\}) = p(\mathrm{X} = 6 \text{ et } \mathrm{Y} = 6) = p(\mathrm{X} = 6) \times p(\mathrm{Y} = 6) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Exercices : 11 p. 402, 15 p. 403, 29 p. 405 du manuel