

# Dénombrement et probabilités

Ts

## 1 Combinaisons

### 1.1 Factorielle et combinaison

**Définition** : Soit  $n$  est un entier supérieur ou égal à 1. On appelle "factorielle  $n$ ", l'entier noté  $n!$ , ayant pour valeur :

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1.$$

Par convention,  $0! = 1$ .

*Exemples* :  $1! = 1$ ,  $2! = 2 \times 1$  et  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ . Les machines savent calculer ces entiers. À l'aide d'une calculatrice, calculer  $9!$ ,  $15!$  et  $37!$ .

**Définition** : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un ensemble admettant  $n$  éléments. Soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq p \leq n$ . On appelle **combinaison** de  $p$  éléments de  $E$  tout sous-ensemble de  $E$  admettant  $p$  éléments.

Le nombre de combinaison de  $p$  éléments de  $E$  est noté  $\binom{n}{p}$  et se lit « $p$  parmi  $n$ ».

**Remarque** : une combinaison de  $p$  éléments de  $E$  revient à un choix simultané de  $p$  éléments parmi  $n$ , sans ordre et sans répétition possible.

**Théorème** : Pour tout couple d'entiers naturels  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n$ ,  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

**Démonstration** :

- Si  $p = 0$ , la seule partie de  $E$  contenant 0 élément est  $\emptyset$ ; il n'y en a donc une seule. De plus  $\frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1 = \binom{n}{0}$ . La formule est vraie pour  $p = 0$ .
- Si  $1 \leq p \leq n$ , on pose  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n\}$ . On va commencer par dénombrer l'ensemble des suites ordonnées de  $p$  éléments de  $E$ . Pour les obtenir, on peut construire un arbre (chaque ramification correspondant au choix du  $i$ -ème élément de la suite ordonnée de  $p$  éléments que l'on est en train de construire).

Il y a  $n$  choix possibles pour le premier élément,  $(n - 1)$  choix possibles pour le deuxième... et  $(n - p + 1)$  pour le  $p$ -ième. Il y a donc  $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1)$  différentes suites ordonnées de  $p$  éléments de  $E$ .

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) \times (n - p) \times \dots \times 2 \times 1}{(n - p) \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Or dans un sous-ensemble, on ne tient pas compte de l'ordre, contrairement au dénombrement effectué ci-dessus. On va donc regrouper les suites ordonnées de  $p$  éléments de  $E$  par paquets; les éléments comme  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ ,  $(e_2, e_1, \dots, e_p)$ ,  $(e_3, e_2, e_1, \dots, e_p)$ , etc. correspondent à la même combinaison de  $p$  éléments de  $E$ . Il y en a  $p!$  (on pourrait refaire un arbre pour s'en convaincre). D'où  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .  $\square$



• **Hérédité** : supposons la propriété vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  fixé arbitrairement et montrons qu'elle est alors vraie au rang  $n + 1$ .

$$\begin{aligned}
 (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ par hypothèse de récurrence} \\
 &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{n-\ell+1} b^\ell \text{ en posant } \ell = k + 1 \text{ dans la 2e somme} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k
 \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang  $n + 1$  et, par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Notation** : avec des notations moins rigoureuses mais plus parlantes,

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Par exemple, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , en utilisant le triangle de Pascal pour les coefficients binomiaux.  $(1 + x)^4 = 1^4 + \binom{4}{1} 1^3 x + \binom{4}{2} 1^2 x^2 + \binom{4}{3} 1^1 x^3 + x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$ .

**Exercices** : 15 à 17 p. 432, 18 p. 433 de l'*Hyperbole*.

## 2 Probabilités conditionnelles

On désigne par  $p$  une probabilité définie sur un univers  $\Omega$ .

### 2.1 Définition et exemple

*Exemple d'introduction* : Un couple (hétérosexuel) a deux enfants, on admet qu'un enfant a une probabilité  $\frac{1}{2}$  d'être un garçon. Calculer la probabilité le cadet soit un garçon. Calculer la probabilité que le cadet soit un garçon sachant que le couple a au moins une fille. (Faire des arbres!).

Ainsi, le fait de savoir un événement réalisé peut influencer sur la probabilité d'un autre.

Soit A et B deux événements tels que  $p(B) \neq 0$ .

**Définition (Probabilité conditionnelle)** : La probabilité de A sachant que B est réalisé est le réel noté  $p_B(A)$  définie par

$$p_B(A) = \frac{p(A \cup B)}{p(B)}.$$

**Notation** :  $P_B(A)$  se lit «probabilité de A sachant ». On note parfois cette probabilité  $P(A|B)$ .

**Conséquence immédiate** : Soit A et B deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$p(A \cap B) = p(B) \times P_B(A) \quad \text{et} \quad p(A \cap \bar{B}) = p(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(A).$$

**Définition (Partition)** : Les événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  forment une partition de l'univers  $\Omega$  lorsqu'ils sont tous **non vides**, deux à deux disjoints et recouvrent  $\Omega$ . Plus précisément :

- pour tout  $1 \leq i \leq n, E_i \neq \emptyset$ ;
- pour tout  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n, E_i \cap E_j = \emptyset$ ;
- $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \Omega$ .

**Théorème (des probabilités totales)** : Soit  $n \in \mathbb{N}^*, \Omega$  un univers et  $B_1, B_2, \dots, B_n$  une partition de  $\Omega$ , alors pour tout événement A :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n),$$

Résultat que l'on trouve parfois sous la forme :

$$p(A) = p(B_1) \times P_{B_1}(A) + p(B_2) \times P_{B_2}(A) + \dots + p(B_n) \times P_{B_n}(A).$$

On va en fait démontrer une version moins générale de ce théorème (version "restreinte" qui est souvent utile dans les problèmes) :

**Corollaire** : Soit A et B deux événements tels que  $p(B) \neq 0$  et  $p(\bar{B}) \neq 0$ . Alors B et  $\bar{B}$  forment une partition de l'univers  $\Omega$  et

$$p(A) = p(B) \times p_B(A) = p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(A).$$

**Démonstration** :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cap \Omega) = p[A \cap (B \cup \bar{B})] \\ &= p[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]. \end{aligned}$$

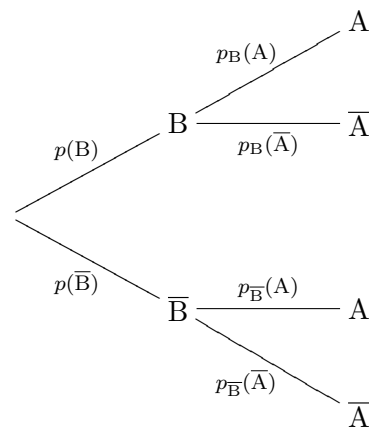
Or les événements  $A \cap B$  et  $A \cap \bar{B}$  sont incompatibles ; en effet :

$$(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap B \cap \bar{B} = \emptyset.$$

On a ainsi  $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$  d'où (en vertu des formules des probabilités conditionnelles) :

$$p(A) = p(B) \times P_B(A) = p(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(A). \quad \square$$

Ce résultat est souvent schématisé sous la forme d'un arbre de probabilités :



**Exemple** : On considère une urne contenant 4 boules rouges et 5 boules noires indiscernables au toucher.

On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. Soit A l'événement : «la première boule tirée est rouge» et B l'événement «la deuxième boule tirée est noire».

Calculer  $p(A), p_A(B)$ , puis en déduire  $p(A \cap B)$ .

**Exercices** : 2 et 3 p. 401, 5 et 6 p. 402, 14, 18 et 19 p. 403 du manuel.

## 2.2 Événements indépendants

**Définition** : On dit que deux événements A et B sont **indépendants** dès que

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

**Propriété** : Si A et B sont deux événements indépendants de probabilité non nulle, alors

$$p_B(A) = p(A) \text{ et } p_A(B) = p(B).$$

On retiendra que lorsque deux événements sont indépendants, la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

**Démonstration** : la démonstration de ce résultat est immédiate. Par exemple : Si  $p(B) \neq 0$  alors d'après la formule des probabilités conditionnelles  $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \times p(B)}{p(B)}$  par indépendance.

Le résultat cherché en découle après simplification par  $p(B) \neq 0$ .  $\square$

*Exemple* : Avec un jeu de 32 cartes, soit les événements C=«tirer un cœur», V=«tirer un valet» et R=«tirer une carte rouge».

En dénombrant ces différents événement par "comptage", et sous hypothèse d'équiprobabilité, on calcule successivement que :

$$p(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad p(V) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p(C \cap V) = p(C) \times p(V) = \frac{1}{32};$$

$$p(R) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, \quad p(C \cap R) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad p(C) \times p(R) = \frac{1}{8}.$$

Dans le premier cas, on voit que les événements C et V sont indépendants (ceci provient du fait que les valets sont "équirépartis" dans les quatre couleurs.

Par contre, C et R ne sont pas incompatibles : on voit bien intuitivement que savoir qu'une carte rouge a été tirée va influencer sur la proba de tirer un cœur.

**Exercices** : 7, 9 et 10 p. 403 du manuel

## 2.3 Variables aléatoires et indépendance