

Considérons un réel $x > 0$. Le carré d'un réel étant toujours positif ou nul, il est facile de se rendre compte des résultats suivants :

$$\begin{aligned}x^4(x-1)+1 &> 0 \\x^2(x^2-4)^2+8 &> 0 \\x^2+1 &> 0\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout réel $x > 0$

$$8(x^4(x-1)+1)+(x^2(x^2-4)^2+8)+16(x^2+1) = x^6+8x^5-16x^4+32x^2+32 > 0 \quad (1)$$

Maintenant que nous avons ce résultat dans notre poche, voyons notre problème. Nous allons montrer le résultat par l'absurde. Supposons donc que

$$x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2}=4$$

et que

$$y > \frac{4}{x^2} > 0$$

Alors nous avons

$$4 = x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2} > x + \frac{4}{x^2} + \sqrt{2x^2 + 2x\frac{4}{x^2} + 3\left(\frac{4}{x^2}\right)^2}$$

C'est-à-dire

$$4 - x - \frac{4}{x^2} > \sqrt{2x^2 + \frac{8}{x} + \frac{48}{x^4}}$$

On conserve l'inégalité en élevant au carré

$$16 + x^2 + \frac{16}{x^4} - 8x - \frac{32}{x^2} + \frac{8}{x} > 2x^2 + \frac{8}{x} + \frac{48}{x^4}$$

En multipliant l'équation par x^4 , on obtient l'inégalité polynomiale suivante

$$16x^4 + x^6 + 16 - 8x^5 - 32x^2 + 8x^3 > 2x^6 + 8x^3 + 48$$

qui se simplifie en

$$x^6 + 8x^5 - 16x^4 + 32x^2 + 32 < 0$$

Qui entre en contradiction avec l'équation (1) établie précédemment.

Ceci montre le résultat.