Introduction - Problèmes préliminaires

Dumeunier Christophe*

Ceci n'est pas un examen ou un test de connaissances suffisantes, mais un bon moyen de se mettre dans le bain. Les mathématiques d'olympiades ne sont pas une sciences exacte, il n'existe pas de plan et de méthodes pour résoudre les problèmes. Seul votre flair vous guidera vers les solution, pour votre plus grand bonheur. C'est pourquoi vous devez affrontez ces quelques problèmes pour vous confrontez au manque de méthode et vous fier uniquement à vote intuition et votre logique. Il n'y a aucun besoin de parvenir à tous les résoudre pour aborder la suite, cependant je vous déconseille de les survoller et de foncer tout droit vers les solutions.

Problème 1 Trouver la somme $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n!$ où $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ et se lit *factorielle n*.

Problème 2 Trouver tous les tripes de nombres réels (x, y, z) tels que quand l'un quelconque des trois est ajouté au produit des deux autres, le résultat est deux.

Problème 3 Combien d'entiers compris entre 1 et 10^{30} inclus ne sont pas des carrés parfaits, des cubes parfaits ou des cinquièmes puissances parfaites ?

Problème 4 Un quadrilatère a un sommet sur chaque côté d'un carré de côté unité. Montrer que les longueurs a, b, c, d des côtés du quadrilatère satisfont les inégalités $2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4$.

Problème 5 Soient $n_1 = \overline{abcabc}$ et $n_2 = \overline{d00d}$ des nombres représentés dans le système décimal avec $a \neq 0$ et $d \neq 0$.

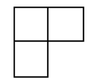
- Prouver que $\sqrt{n_1}$ ne peut pas être entier.
- Trouver tous les entiers n_1 et n_2 tels que $\sqrt{n_1 + n_2}$ est un nombre entier.
- Parmis toutes les paires (n_1, n_2) telles que $\sqrt{n_1 n_2}$ est un entier, trouver celle pour laquelle $\sqrt{n_1 n_2}$ a la plus grande valeur.

Problème 6 A, B, C, D sont quatres points consécutifs sur la circonférence d'un cercle et P, Q, R, S sont des points de cette circonférence qui sont respectivement les milieux des arcs AB, BC, CD, DA. Prouver que PR est perpendiculaire à QS.

Problème 7 Prouver que l'équation $x^3 + 11^3 = y^3$ n'a pas de solution dans les entiers strictement positifs. (ne pas faire appel au théorème de Fermat récemment démontré).

*Licencié en sciences mathématiques à l'ULB, présélectionné belge pour les OMI de 2003.

Problème 8 Un carré est divisé en 25 petits carrés de telle sorte que exactement un d'entre eux a un côté de longueur différente de 1 (tous les autres carrés sont de côté 1). Trouver l'aire du carré initial.

Problème 9 Un carré est enlevé d'un échiquier carré composé de 2^{2n} carrés. Montrer que les $2^{2n}-1$ carrés restants peuvent être recouverts par des pièces de la forme  qui recouvrent trois carrés.

Problème 10 Montrer que deux cercles, non situés dans un même plan, qui se coupent en deux points ou sont tangents à une même droite en un même point, appartiennent à une même sphère.

Problème 11 Soit ABC un triangle équilatéral et P un point quelconque situé à l'intérieur du triangle. On considère les trois perpendiculaires PD, PE, PF abaissées de P sur les trois côtés du triangle. Montrer que quelque soit la choix de P, $\frac{|PD|+|PE|+|PF|}{|AB|+|BC|+|CA|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ où $|XY|$ est la longueur du segment défini par les points X, Y.

Problème 12 On donne un grillage $m \times n$ et 3 couleurs (le grillage délimite $m \times n$ carrés). On veut colorier chaque segment du grillage avec une des trois couleurs de telle sorte que chaque carré ait deux côté d'une couleur et deux côtés d'une deuxième couleur. Combien de tels coloriages sont possible ?